56. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

560611

Wir sind gewohnt, Zahlen im Zehnersystem (dekadisches System), also mit den zehn Ziffern von 0 bis 9, darzustellen.

Ebenso kann man Zahlen auch nur unter Verwendung von den zwei Ziffern 0 und 1 darstellen; dieses System heißt Zweiersystem (Dualsystem), die so dargestellten Zahlen heißen dann Dualzahlen. Beispiele für die Umwandlung einer Dualzahl in das Zehnersystem und umgekehrt sind:

$$\begin{aligned}\mathbf{[10011]_2} &= 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = \mathbf{19}\end{aligned}$$

$$\mathbf{56} = 1\cdot 32 + 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 = \mathbf{[111000]_2}$$

Im Dualsystem gilt deshalb $[0]_2 + [0]_2 = [0]_2$, $[0]_2 + [1]_2 = [1]_2$, $[1]_2 + [1]_2 = [10]_2$.

a) Berechne alle Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^{10}.
b) Wandle die Dualzahlen $[1111]_2$ und $[10001]_2$ in Zahlen des Zehnersystems um.
c) Stelle die Zahlen von 64 bis 69 (im Zehnersystem) jeweils als Dualzahlen dar.
d) Berechne im Dualsystem $[110110]_2+[10110]_2$, ohne die Zahlen vorher in das Zehnersystem umzuwandeln.
e) Berechne im Dualsystem $[110101]_2 \cdot [1010]_2$, ohne die Zahlen vorher in das Zehnersystem umzuwandeln.

560612

Beate denkt sich folgendes Spiel mit Zahlen aus:

(1) Wähle eine zweistellige Zahl aus.
(2) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2, wenn sie ungerade ist, addiere 3.
(3) Wenn du jetzt die Zahl 1 erreicht hast, höre auf, anderenfalls gehe zu (2).

Interessant ist die Frage, ob man bei jeder Anfangszahl bei der 1 endet oder ob es Zahlen gibt, bei denen man die 1 nicht erreicht.

a) Wähle mehrere Startzahlen und führe dann die Rechenschritte aus. Finde dabei heraus, ob die Startzahl schließlich auf die 1 führt.

b) Bestimme eine gemeinsame Eigenschaft für diejenigen Startzahlen, die schließlich nicht auf 1 führen.

Ferdinand schlägt vor, den Schritt (2) in diesem Spiel folgendermaßen zu verändern:

(2a) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2. Wenn sie ungerade ist und sich durch 3 teilen lässt, addiere 5, sonst addiere 3.

c) Weise nach, dass man mit dieser neuen Bedingung von jeder Startzahl zur 1 gelangt.

560613

In Deutschland gibt es Münzen mit acht verschiedenen Werten:

1 ct, 2 ct, 5 ct, 10 ct, 20 ct, 50 ct, 1 €, 2 €.

Karl soll sich von jeder dieser acht Münzen eine bestimmte Anzahl nehmen, mindestens eine und höchstens acht. Alle diese Anzahlen müssen verschieden sein.

Zum Beispiel könnte er zwei 1-ct-, sieben 2-ct-, fünf 5-ct-, eine 10-ct-, acht 20-ct-, vier 50-ct-, sechs 1-€- und dann drei 2-€-Münzen nehmen und hat dann einen Geldbetrag von 16, 11 €.

a) Ermittle den größten und den kleinsten Geldbetrag, den Karl auf diese Weise erhalten kann, und gib jeweils die Anzahl der einzelnen Münzen an.
b) Kann man die Verteilung der Münzen auch so vornehmen, dass man einen Cent mehr als den kleinsten Geldbetrag erhält?
Kann man die Verteilung der Münzen auch so wählen, dass man einen Cent weniger als den größten Geldbetrag erhält?
c) Kann man auch zwei Cent mehr als den kleinsten Geldbetrag oder zwei Cent weniger als den größten Geldbetrag erhalten?

560614

Die Schüler einer 6. Klasse wollen mit einer Mannschaft an einem Triathlon-Wettkampf teilnehmen. Zu jeder Mannschaft gehören drei Schüler: Der erste Mannschaftsteilnehmer muss 5 km laufen, der zweite 500 m schwimmen und der dritte 15 km Rad fahren.

Die Schüler stellen fest:

(1) Anton und Benni sind besonders gute Läufer.
(2) Marvin, Nico und Ole schwimmen sehr schnell.
(3) Ulli, Victor und Wanja sind sehr gute Radfahrer.

Jeder soll in der Disziplin starten, in der er besonders gut ist. Andere Schüler dieser Klasse sollen nicht starten.

a) Wie viele Möglichkeiten hat die Klasse, aus den genannten Schülern eine starke Mannschaft zusammenzustellen?
b) Wie viele Möglichkeiten hat die Klasse insgesamt, wenn sie eine Mannschaft mit der Nummer 1 und eine Mannschaft mit der Nummer 2 aufstellen darf und weiterhin jeder Schüler in seiner Lieblingsdisziplin starten soll?
c) Nico und Victor wollen unbedingt in ein und derselben Mannschaft starten oder gar nicht. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun noch, die Mannschaften 1 und 2 zu bilden?